UNIVERSITE DE KARA
FACULTE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES

A.U. 2019-2020

**TD Mécanique Quantique (L2)**

**Série N° 2**

---

## Exercice 1

En optique électronique, on réalise une expérience, analogue à celle du biprisme, en envoyant, sur un fil chargé positivement, un faisceau d'électrons accélérés sous une tension $V_a$ .

1- Rappeler l'expression de la longueur d'onde $\lambda$ de l'onde associée à une particule matérielle de masse $m$ et se déplaçant à la vitesse $V$ (onde pilote de De Broglie). On se limitera à un traitement classique.

2- Trouver l'expression de $\lambda$ en fonction de $V_a$ dans le cas des électrons.
Calculer $\lambda$ pour $V_a = 100\,\mathrm{V}$ ; commenter le résultat obtenu.

## Exercice 2 **Quantification de l'énergie : Modèle de Bohr pour un hydrogènoïde**

Un hydrogénoïde est un atome constitué d'un électron (masse m et charge –e) et d'un noyau de masse M>>m et de charge +Ze. On suppose que l'électron décrit un cercle de rayon r autour du noyau supposé fixe

**1) a)** Montrer que l'énergie totale de l'hydrogénoïde s'écrit : $E = -\dfrac{Ze^2}{8\pi\pi_0}\dfrac{1}{r}$

**b)** Quelle est la signification d'une énergie totale nulle ?

**2)** Quelle résultat obtient-on par application de la théorie classique ?

**3)** On tient compte des deux hypothèses suivantes (hypothèses de Bohr) :

- les seules orbites permises pour l'électron sont celles pour lesquelles le moment cinétique $\vec{\sigma}$ satisfait à la relation : $\|\vec{\boldsymbol{\sigma}}\| = \mathbf{n}\hbar$ où n est un entier $\geq 1$
- l'électron rayonne de l'énergie seulement lorsqu'il saute d'une orbite caractérisée par une énergie $E_n$ à une autre orbite d'énergie $E_p$ plus petite. La fréquence $\nu_{np}$ d'émission est telle que : $\mathbf{h\nu_{np} = E_n - E_p}$

**a)** Etablir l'expression du rayon des orbites permises ainsi que leurs énergies correspondantes.

**b)** Montrer que les longueurs d'onde $\lambda_{nm}$ d'émission vérifient la relation suivante :

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{np}}} = \mathbf{Z^2 R_H}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p^2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\right)$$

où $R_H$ est une constante, dite de Rhydberg.

Exprimer littéralement, puis numériquement la constante $R_H$.

## Exercice 3

On considère une particule libre de masse $m$ décrite par un paquet d'ondes à une dimension, obtenu par la superposition d'ondes planes e$^{ikx}$ d'amplitude $g(k)$ où $g(k)$ est une fonction gaussienne normée centrée en $k = k_0$ et donnée par :

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} exp\left[-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right]$$

$a$ étant une constante ayant la dimension d'une longueur et $k$ le module du vecteur d'onde.

1.-a Déterminer la fonction $\Psi(x,0)$ décrivant le paquet d'ondes à l'instant $t = 0$.
b-Donner à cet instant la densité de probabilité de la particule et la représenter graphiquement.

2. Sachant que la largeur d'une fonction gaussienne $f(\ell) = e^{-\frac{\ell^2}{b^2}}$ est définie par $\Delta\ell = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$,

a. Calculer les largeurs $\Delta x$ et $\Delta k$ correspondant à $\Psi(x,0)|^2$ et $g(k)|^2$.

b. Evaluer alors le produit $\Delta x.\Delta p$ des incertitudes sur la position et l'impulsion de la particule. Conclure ?

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$